数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 1-8

$\mathbb{Z}^2$ 極小系から生じる接合積 C^* 環の AF 埋め込み性について

松井宏樹

1 序

接合積 C^* 環の AF 埋め込み性について考えます。この方面での最も大事な結果のひとつにピムズナーの定理があります。X がコンパクト距離空間のとき、$T \in \mathrm{Homeo}(X)$ によって定まる $\mathbb{Z}$ 作用による $C(X)$ の接合積を、$C^*(X,T)$ と書くことにします。

定理 1 ([Pi]). コンパクト距離空間 X と $T \in \mathrm{Homeo}(X)$ に対して次は同値。

(i) $C^*(X,T)$ が AF 埋め込み可能である。
(ii) $C^*(X,T)$ が quasi-diagonal である。
(iii) $C^*(X,T)$ が安定有限である。
(iv) T が擬非遊走的である。つまり、$T(\overline{U}) \subsetneq U$ となるような開集合 $U \subset X$ は存在しない。

つまり、可換な C^* 環の $\mathbb{Z}$ 作用による接合積については、AF 埋め込み可能であるための必要十分条件が既にわかっているわけです。ところが $\mathbb{Z}^2$ 作用の場合は今のところほとんど何もわかっていません。コンパクト距離空間 X 上に二つの交換する同相写像 $T,S \in \mathrm{Homeo}(X)$ があるとき、(X,T,S) を $\mathbb{Z}^2$ 力学系と呼ぶことにします。そして、この作用による $C(X)$ の $\mathbb{Z}^2$ 接合積を、$C^*(X,T,S)$ と書くことにします。

ボアクレスクは quasi-diagonal 性に関する論文の中で、次のような問題をあげています。

問題 2 ([V2]). (X,T,S) を $\mathbb{Z}^2$ 力学系とするとき、接合積 C^* 環 $C^*(X,T,S)$ はいつ AF 埋め込み可能となるか？

論文 [M] において、(X,T,S) が極小であってさらにある特殊な条件を満たす場合に、この問題に対する解答が与えられました。このノートではその結果を報告したいと思います。

2 AT 環の $\mathbb{Z}$ 接合積

まず最初に AT 環の $\mathbb{Z}$ 接合積の AF 埋め込み性を考察する必要があります。

ブラウンは [B] において、AF 環の $\mathbb{Z}$ 接合積が AF 埋め込み可能であるための必要十分条件を与えました。このブラウンの手法を真似することにより、次の定理を示すことが出来ます。

定理 3 ([M, Theorem 3.3]). A が単位元を含む単純な AT 環であって実階数ゼロであるとする。すると任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ に対して、接合積 $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は AF 埋め込み可能である。

この定理の証明の鍵となるのは、ロホリン性と呼ばれる C^* 環の自己同型の性質です。ブラウンの AF 環の時の証明と違うのは、このロホリン性から stability という性質を導く際にある種のホモトピー補題が必要になるという点です。以下に証明の概略を述べたいと思います。

次の命題が定理 3 の証明の実質的な部分です。

命題 4 ([M, Proposition 3.2]). A が単位元を含む単純な実階数ゼロの AT 環であって、B が単位元を含む単純な AF 環であるとする。単位元を保つ準同型 $\varphi : A \to B$ と $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ 及び $\beta \in \mathrm{Aut}(B)$ が与えられて、かつ $\varphi\alpha$ と $\beta\varphi$ が漸近的ユニタリ同値であるとする。さらに β がロホリン性を持つとする。すると、ユニタリ $w \in B$ と単位元を保つ準同型 $\psi : A \to B$ が存在して、$\psi\alpha = \mathrm{Ad}\, w\beta\psi$ を満たす。

与えられた A と α に対して、もし上の命題の仮定を満足する B と β そして φ を見つけることが出来れば、定理 3 は証明されたことになります。なぜなら上の命題により、接合積 $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は ψ を通して $B \rtimes_{\mathrm{Ad}\, w\beta} \mathbb{Z} \cong B \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ に埋め込まれたことになり、後者の環は [V1, Theorem 3.6] もしくは [B, Corollary 4.10] によって AF 埋め込み可能であることがわかるからです。この命題 4 はほとんど [B, Proposition 2.8] と同じです。唯一の違いは、近似的ユニタリ同値よりも強い漸近的ユニタリ同値という仮定を置いているという点です。この違いはもちろん、環が AF から AT になったという事に起因しています。具体的には、AF 環の場合には単に n 乗根を取るという操作で良かったところが、AT 環になったがために [BEEK] のホモトピー補題を使わなければならなくなったのです。この辺りの事情は、岸本先生による AT 環の自己同型の分類 [K, Theotem 5.1] の時と全く同じです。つまり命題 4 は、2 つの論文 [B] と [K] のアイデアをつなぎ合わせるだけで証明できます。(もう少し細かいことを言うと、もう一つだけ問題があります。それは、A から B への 2 つの準同型がいつ漸近的ユニタリ同値になるのかを判定しなければいけない、という点です。しかしこの点も、[KK] の結果を比較的容易に拡張することができるので、大丈夫です。)

さらに、定理 3 とリンによる TAF 環の分類定理 ([L]) をあわせることにより、次が系として得られます。

系 5 ([M, Corollary 3.4]). A が単位元を含む単純な実階数ゼロの核型 TAF 環であって、かつ普遍係数定理を満たすとする。すると任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ に対して、接合積 $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は AF 埋め込み可能である。

証明はとても簡単です。A に適当な UHF 環をテンソルすれば、A の K 群のねじれ元がぜんぶ消えてくれるので、リンの分類定理によりそのテンソル積は AT 環だということがわかります。UHF 環の上では恒等写像であるという自己同型を考えれば、これで定理 3 に帰着できたことになります。

3 $\mathbb{Z}^2$ 極小系

(X,T,S) を $\mathbb{Z}^2$ 力学系とします。T 不変かつ S 不変な閉集合が存在しないとき、(X,T,S) を $\mathbb{Z}^2$ 極小系と呼ぶことにします。(X,T,S) が $\mathbb{Z}^2$ 極小系ならば、任意の $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ に対して T^nS^m が擬非遊走的であることがわかりますから、接合積 C^* 環 $C^*(X,T,S)$ は AF 埋め込み可能ではないかと強く推定されます。実際、定理 3 より次が容易に示せます。

命題 6 ([M, Proposition 4.1]). (X,T,S) が $\mathbb{Z}^2$ 極小系であるとする。もし、X がカントール集合であり、かつ T が極小写像であれば（つまり T 不変な閉集合が存在しなければ）、$C^*(X,T,S)$ は AF 埋め込み可能である。

カントール集合 X とその上の極小写像 $T\in\mathrm{Homeo}(X)$ に対して、接合積 $C^*(X,T)$ が実階数ゼロの単純な AT 環になるというパットナムの定理 ([Pu]) を使えば、定理 3 から命題 6 が従うことは明らかです。

この命題 6 は、T 自身が極小であるという極めて特殊なケースにしか適用できませんから、より一般の場合をこの命題 6 に帰着させることを考えます。条件 (#) を次で定義します。

定義 7. コンパクト距離空間上の自己同相写像 $T\in\mathrm{Homeo}(X)$ が条件 (#) を満たすとは、任意の T 不変な開集合 U に対してある T 不変開集合 V が存在して $\overline{V}\subset U$ となることを言う。

人に訊いたり本を調べたりしてみたのですが、この条件には名前は付いていないようです。どういう意味があるのかちょっと掴みにくい定義なんですが、大事なことは、この条件はあまり本質的なものではないという点です。つまり、AF 埋め込みが可能なのか不可能なのかを、この条件 (#) が決めるというわけでは全くありません。そうではなくて、AF 埋め込み可能であることを証明するのに（現段階で）必要な、技術的な仮定です。したがって、将来なにか別の方法なりアイデアなりが出てくれば、この条件は全く無用になってしまうと思われます。

次が主定理です。

定理 8 ([M, Theorem 4.8]). (X,T,S) が $\mathbb{Z}^2$ 極小系であって、ある $(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus 0$ に対して T^nS^m が条件 (#) を満たすとする。すると、$C^*(X,T,S)$ は AF 埋め込み可能である。

どうやって定理 8 を命題 6 に帰着させるのか、以下で説明したいと思います。

条件 (#) を使うと、次の補題を示すことが出来ます。

補題 9. (X,T,S) を $\mathbb{Z}^2$ 力学系とする。T が条件 $(\#)$ を満たすとする。すると、カントール極小系 (Y,ψ) と連続写像 $f: Y \to \mathbb{Z}$ が存在して、次で定まる $X \times Y$ の上の同相写像 γ が極小になる。

$$\gamma(x,y) = (TS^{f(y)}(x), \psi(y)) \quad \text{for all} \quad (x,y) \in X \times Y$$

このようにして構成された力学系 $(X \times Y, \gamma)$ は、(Y,ψ) の斜積拡大と呼ばれたりします。どうやってこの補題を示すのか、条件 $(\#)$ はなぜ必要なのか、といった点を後回しにして、まず先に、この補題さえ示されれば定理8が証明できるということを説明します。

まず定理8の仮定どおり、ある $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ に対して T^nS^m が条件 $(\#)$ を満たすとしましょう。同相写像が条件 $(\#)$ を満たすことと、そのある巾乗が条件 $(\#)$ を満たすということとが同値になるので、はじめから n と m は互いに素であるとして構いません。さらに、生成元を取り替えることによって、T が条件 $(\#)$ を満たすとしても構いません。任意のコンパクト距離空間はカントール集合からの全射連続写像による像として書ける、というのは良く知られた事実ですが、$\mathbb{Z}^2$ 作用を込みにした形で同様のことが証明できるので、最初から X はカントール集合であると仮定することが出来ます。

さて、この (X,T,S) に対して補題9を使いましょう。すると、カントール極小系 (Y,ψ) と連続写像 $f: Y \to \mathbb{Z}$ が得られ、それによって $X \times Y$ 上の極小写像 γ が定義されました。X も Y もカントール集合でしたから、$(X \times Y, \gamma)$ はカントール極小系であることになります。

$X \times Y$ 上の同相写像 τ を $\tau = S \times id$ で決めます。明らかにこの τ と γ は交換しますから、$(X \times Y, \gamma, \tau)$ はカントール集合の上の $\mathbb{Z}^2$ 極小系です。γ が既に極小ですから命題6より、接合積 C^* 環 $C^*(X \times Y, \gamma, \tau)$ は AF 埋め込み可能であると結論できます。この接合積 C^* 環の中で γ と τ の作用を implement している2つのユニタリをそれぞれ u と v としましょう。つまり、任意の $g \in C(X \times Y) = C(X) \otimes C(Y)$ に対して、

$$ugu^* = g\gamma^{-1}, \; vgv^* = g\tau^{-1}$$

となっています。いま $C^*(X \times Y, \gamma, \tau)$ のユニタリ w を、

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} uv^{-k} 1_{X \times f^{-1}(k)}$$

で定めます。$1_{X \times f^{-1}(k)}$ というのは $X \times f^{-1}(k)$ という集合（これは開かつ閉です）の特性関数のことです。関数 f が連続なので $f(Y)$ は有限集合になり、したがって上の総和は実際には有限和にしかなりません。このユニタリ w がどういう働きをしているのかと言うと、それはちょっと考えてみれば明らかで、要するに γ に適当な S の巾をかけてやって、$T \times \psi$ という同相写像にしてやっているわけです。したがって w は、任意の $g \in C(X)$ に対して、

$$w(g \otimes 1)w^* = gT^{-1} \otimes 1$$

を満たすことになります。既に得ている $v(g\otimes 1)v^* = gS^{-1}\otimes 1$ と合わせると、これで、$C^*(X,T,S)$ から $C^*(X\times Y,\gamma,\tau)$ への準同型が得られました。$C^*(X\times Y,\gamma,\tau)$ は AF 埋め込み可能でしたから、$C^*(X,T,S)$ も AF 埋め込み可能であるということになり、証明が完成しました。

では次に補題 9 について少し説明したいと思います。補題 9 は、何らかの都合のよいカントール極小系 (Y,ψ) を構成することが出来ると述べているわけですが、実際にこの (Y,ψ) を作ろうとすると、「順序の入ったブラッテリ図式」というやつを扱う必要が出てきます。しかし、「順序の入ったブラッテリ図式」というのをここでまともに扱うのは割と大変なので、もっと大雑把に説明したいと思います。

(Y,ψ) や $f:Y\to\mathbb{Z}$ がどんな条件を満たさなければならないのか、逆に考えてみることにしましょう。γ が極小写像になるようにしたいわけですが、γ が極小であるとは、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma^n(O)=X\times Y$$

が任意の開集合 $O\subset X\times Y$ に対して成り立つことと同値です。ですから、任意に開集合 O が与えられたとして、上の式が成り立つように、γ を（ひいては (Y,ψ) や f を）構成できないか、考えることにします。X も Y もカントール集合でしたから、開かつ閉な集合 $U\subset X$ と $V\subset Y$ があって、$O=U\times V$ となっているとして構いません。γ の定義を見ると、X 成分のほうは TS^k がかかるわけですが、S の何乗がかかるのかは Y 成分によっています。それはもちろん f という関数によっているわけですが、ここでは簡単のために、各 n に対し $\psi^n(V)$ という集合の上で f は一定であるとしましょう（本当はこのような事は期待できません。あくまでも、簡単のために、です）。すると $\gamma(O),\gamma^2(O),\gamma^3(O),\ldots$ は、

$$TS^2(U)\times\psi(V),\ T^2S^{-1}(U)\times\psi^2(V),\ T^3S^3(U)\times\psi^3(V),\ldots$$

などとなっていると思えるわけです。いま私は S の巾を 2 とか -1 とか 3 などと書きましたが、もちろんこれは適当な数字です。これらの数字は実際には関数 f によって決まります。ただし f は連続写像であって Y はコンパクトですから、f が取ることの出来る値は有限個しかないことに注意しましょう。（T の巾のほうは γ の定義から規則正しく $1,2,3,\ldots$ となっています。）γ が極小な同相写像になるためには、これらの開かつ閉な集合たちの和が、$X\times Y$ にならなければなりません。ここで、さらにもっと激しく大雑把な議論をすることにします。これらの集合の和が $X\times Y$ 全体を覆うためには、最低限、

$$TS^2(U)\cup T^2S^{-1}(U)\cup T^3S^3(U)\cup\cdots=X$$

かつ

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\psi^n(V)=Y$$

でなければなりません（本当に最低限度こうでなくてはならない、という程度の話ですが）。(Y,ψ) は極小系ですから（というより極小系になるように作るんですから）2番目のほうの式は問題ないとして、1番目のほうの式が成り立つものかどうか気になります。f の取る値を適当に並べることによって、本当に上の和が X 全体を覆うようにできるでしょうか。つまり、問題として定式化するなら次のようになります。

問題 10. (X,T,S) が $\mathbb{Z}^2$ 極小系であるとする。任意の開集合 $U\subset X$ に対して、

$$\phi_0(U)\cup\phi_1(U)\cup\cdots\cup\phi_k(U)=X$$

かつ

$$\phi_0=id,\quad \phi_i\phi_{i-1}^{-1}=TS^{-1}\text{ or }T\text{ or }TS\quad\text{for }i=1,2,\ldots,k$$

となるような同相写像の列 $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_k$ が取れるだろうか。

連続写像 f の値域が有限集合にしかなり得ないことを考慮して、上の問題では f の値域が $\{-1,0,1\}$ であるという制約を設けています。(X,T,S) が $\mathbb{Z}^2$ 極小系であることは、

$$\bigcup_{n,m\in\mathbf{N}}T^nS^m(U)=X$$

が任意の開集合 U に対して成り立つことと同値ですから、そのことを考えると上の問題は肯定的に解決できそうな気がします（n や m は自然数全体を走るとしていますが、X はコンパクトですから実際には有限和で覆えることにも注意して下さい)。事実、上の問題で $\phi_i\phi_{i-1}^{-1}$ が取りうる「値」として、もしも T^{-1} や S が許されるのであれば、明らかに問題は解決されます。ところが定理8を証明するには、γ という同相写像の形はどうしても $(TS^{f(y)}(x),\psi(y))$ といった感じでないといけませんから、そうすると上の問題が成り立つかどうか微妙になって来るのです。

この点を回避するために私は条件 (#) を導入しました。

補題 11. もしも T が条件 (#) を満足すれば、問題10は肯定的に解決される。

証明は簡単です。いま勝手に X の開集合 U を取りましょう。$\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}T^n(U)$ は T 不変な開集合ですから、条件 (#) より

$$\overline{V}\subset\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}T^n(U)$$

となる T 不変開集合 V が存在します。$\overline{V}$ はコンパクトですから、ある n が存在して

$$U\cup T(U)\cup\cdots\cup T^{n-1}(U)\supset V$$

となります。すると

$$ST^n(U) \cup ST^{n+1}(U) \cup \cdots \cup ST^{2n-1}(U) \supset ST^n(V) = S(V)$$

が得られます。ここで V が T 不変であることを使いました。これを繰り返すと次々に $V, S(V), S^2(V), \ldots$ が得られますが、$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S^k(V)$ は T 不変かつ S 不変な開集合ですから、極小性より X に一致してしまいます。これで、問題10に合うような形で X 全体を覆うことが出来ました。さらにさかのぼって考えると、条件 (#) の仮定のもとに、補題9が成り立つことが言えます。

もしも問題10を（条件 (#) を仮定せずに）証明できたなら、任意の $\mathbb{Z}^2$ 極小系に対して AF 埋め込みが言えることがわかります。いまのところ問題10に対する反例は見つかっていないのですが、知られている $\mathbb{Z}^2$ 極小系の例自体が少ないこともあり、一般的にはどうかというと私には何ともわかりません。

4 例

定理8を適用できる例を最後にあげたいと思います。

(1) まずはくだらない例から説明します。(X, T) と (Y, S) が2つの $\mathbb{Z}$ 極小系であるとします。すると当然 $(X \times Y, T \times id, id \times S)$ は $\mathbb{Z}^2$ 極小系であることになります。明らかに $T \times id$ は条件 (#) を満たしますから、定理8より AF 埋め込み性が証明できます。しかしこの場合の接合積 C^* 環は、明らかに $C^*(X, T)$ と $C^*(Y, S)$ のテンソル積ですから、何も定理8を使わなくても AF 埋め込み性は明らかです。

(2) X をコンパクト距離空間とし、$\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ が極小な流れであるとします。任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して、ϕ_t は条件 (#) を満たすことがわかります。したがって、$s, t \in R$ が $\mathbb{Q}$ 上独立な2つの実数であるとき、(X, ϕ_s, ϕ_t) は明らかに $\mathbb{Z}^2$ 極小系になりますが、この $\mathbb{Z}^2$ 極小系から出来る接合積 C^* 環は定理8より AF 埋め込み可能であることになります。

(3) (X, T, S) と (Y, T', S') が2つの $\mathbb{Z}^2$ 極小系であって、連続写像 $\pi : Y \to X$ が $\pi T' = T\pi$ かつ $\pi S' = S\pi$ であるとします。このようなとき (Y, T', S') は (X, T, S) の拡大であると言われたりします。いま、π がある軌道の上で1対1になっている（つまり $\pi^{-1}\pi(y) = \{y\}$ となる $y \in Y$ がある）か、もしくは π が局所同相写像になっていると、仮定します（応用上は、力学系の拡大を与える写像 π は、この2つのタイプのうちのいずれかであることが多いです）。このとき、T が条件 (#) を持てば T' も条件 (#) を持つということが、証明できます。したがって定理8より、$C^*(Y, T', S')$ が AF 埋め込み可能であることが、結論できます。上に述べた例**(1)(2)**から出発して、ある軌道の上で1対1になっているような π か、もしくは局所同相写像になっている π で、次々に拡大していけば、定理8を適用することの出来る自明でない例が次々に得られることになります。

参考文献

[BEEK] Bratteli, O.; Elliott, G. A.; Evans, D. E.; Kishimoto, A.; *Homotopy of a pair of approximately commuting unitaries in a simple C^*-algebra*, J. Funct. Anal. 160 (1998), 466–523.

[B] Brown, N. P.; *AF embeddability of crossed products of AF algebras by the integers*, J. Funct. Anal. 160 (1998), 150–175.

[K] Kishimoto A.; *Unbounded derivations in AT algebras*, J. Funct. Anal., 160 (1998), 270-311.

[KK] Kishimoto A.; Kumjian, A.; *The Ext class of an approximately inner automorphism, II*, preprint.

[L] Lin H.; *Classification of simple C^*-algebras of tracial topological rank zero*, preprint.

[M] Matui H.; *AF embeddability of crossed products of AT algebras by the integers and its application*, to appear in J. Funct. Anal.

[Pi] Pimsner, M. V.; *Embedding some transformation group C^*-algebras into AF algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems 3 (1983), 613–626.

[Pu] Putnam, I. F.; *On the topological stable rank of certain transformation group C^*-algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), 197–207.

[V1] Voiculescu, D.; *Almost inductive limit automorphisms and embedding into AF-algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems 6 (1986), 475–484.

[V2] Voiculescu, D.; *Around quasidiagonal operators*, Integral Equations Operator Theory 17 (1993), 137–149.

京都市左京区北白川追分町
京都大学理学研究科数学教室
松井宏樹